



T.C.
İSTANBUL GELİŞİM ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜ
EK8-Sonuç Raporu Formu

Aşağıda bilgileri bulunan projemin sonuç raporunun e-kütüphanede yayınlanmasını;

İSTİYORUM

İSTEMİYORUM

GEREKÇESİ: Sonuç raporunun hazırlandığı dönemde dergide yayınlanması uygun görülmemiş olup elde edilen tüm özgün bulgular farklı bir dergide yayınlanmak üzere düzenlenmektedir.

PROJE TÜRÜ	Doktor Öğretim Üyesi ve Uzman Destekleme Projesi
PROJE NO	DUP-011220-YA
PROJE BAŞLIĞI	Bir Ultra- Grubun Altultra- Grupları ve Abelyan Bölüm Ultra-Grupları Karakterizasyonu
PROJE YÜRÜTÜCÜSÜ	Dr. Öğr. Üyesi Yıldız AYDIN
PROJE BAŞLIĞI	Characterization of Subultra-Groups and Abelian Quotient Ultra-Groups of an Ultra-Group

.../.../20..

Proje Yürütücüsü

Dr. Öğr. Üyesi Yıldız AYDIN

İSTANBUL GELİŞİM ÜNİVERSİTESİ
BİLİMSEL ARAŞTIRMA PROJESİ
SONUÇ RAPORU

Bir Ultra- Grubun Altultra- Grupları ve Abelyan Bölüm Ultra-Grupları Karakterizasyonu

Dr. Öğr. Üyesi Yıldız AYDIN

DUP-011220-YA

Başlama Tarihi: 8 Mart 2021

Bitiş Tarihi: 8 Mart 2023

Rapor Tarihi: 8 Mart 2023

İstanbul Gelişim Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Uygulama ve Araştırma Merkezi
İstanbul - 2023

Projenin Türkçe ve İngilizce Adı ve Özetleri

Bir Ultra- Grubun Altultra- Grupları ve Abelyan Bölüm Ultra-Grupları Karakterizasyonu

Characterization of Subultra-Groups and Abelian Quotient Ultra-Groups of an Ultra-Group

Özet

Bu projede bir sonlu grup üzerinde bir altgrubun ultra-grubu üzerinde verilen tanım doğrultusunda ultra-grubun altgrupları çalışılmıştır. Bunun dışında ultra-grubun bir altkümesi tarafından üretilen altultra-grubu ve grup teorideki temel altgrup çıkarımlarının altultra-grup kavramına uyarlanması ele alınmıştır. Ayrıca yine verilen normal altultra-grup tanımından yola çıkarak bu tür altultra-gruplar için bazı çıkarımlar üzerinde durulmuştur. Daha sonra normal altultra-grup ile birlikte tanımı daha önce verilen bölüm altultra-grup tanımının geliştirilmesi çalışılmıştır.

Abstract

In this project, the subgroups of of the ultra-group were studied in accordance with the definition given on the ultra-group of a subgroup over a finite group. In addition, subultra-group generated by a subset of the ultra-group and the application of the fundamental subgroup inferences in group theory to the concept of the subultra-group are discussed. Moreover based on the normal subultra-group definition given, some implications of such subultra-groups are emphasized. Then the definion of the quotient ultra-group was developed together with the definion of normal subultra-group.

I. Amaç ve Kapsam

Bu projenin temel amacı literatüre yeni kazandırılmış olan Ultra-Grup kavramının Grup Teorideki karşılıklarının tutarlı bir şekilde uyarlanması ve daha önce ifade edilmeyen bazı çıkarımlarda bulunmaktır. Bu bağlamda:

- Ultra-grubun bir altkümesi tarafından üretilen altultra-grubun tanımlanıp özelliklerinin belirlenmesi
- Bir ultra-grubun abelyan altultra-gruplarının belirlenmesi, özel olarak ultra-grubun merkezinin oluşturulması
- Bir ultra-grubun normal altultra-grubu tanımı ve bunun yardımıyla bölüm ultra-gruplarının özelliklerinin araştırılması
- Bölüm ultra-gruplarının abelyanlığı ve böylece ultra-grupların çözülebilirliğinin araştırılması amaçlanmıştır.

II. Materyal ve Yöntem

Bu projenin oluşturulması sürecinde;

- Projenin ilk safhalarında bu konuda yayınlanmış makaleler incelenmiş,
- Makalelerdeki çıkarımların (önergeler, teoremler,...) ispatları analiz edilmiş,
- Makalelerden elde edilenler yardımıyla grup teorideki karşılıkları oluşturulmuş,
- Bulgular LATEX yardımıyla elektronik ortama aktarılmış,
- Son olarak bulgular yayınlanmak üzere dergilere gönderilmiştir.

III. Analiz ve Bulgular

Projede kullanılan temel tanım ve teoremler aşağıda Giriş bölümünde sunulmuş ve analiz edilmiş ve bu analizlere dayanılarak elde edilenler Bulgular başlığıyla verilmiştir.

Giriş

Burada G sonlu grup ve e, G grubunun birim elemanı olarak verilmiştir. Bu çalışmada $HM = MH$ koşulunu sağlayan, G nin H ve M boştan farklı altkümeleri üzerinde çalışılmıştır. Açık olarak genelde $HM \neq MH$ dir.

Her $h \in H$ ve her $m \in M$ için $hm = h_0m_0$ eşitliği verildiğinde $h = h_0$ ve $m = m_0$ sağlanıyorsa (H, M) altküme çiftine *transversal* denir. Altkümeler için verilen transversal özelliği altgruplar için de verilebilir. H ve M , G nin altgrupları olmak üzere eğer $H \cap M = e$ ise (H, M) altgrup çiftinin transversal olduğu açıktır.

Bu çalışmada H , G nin altgrubu ve M , G nin boştan farklı altkümeleri olması durumunda ılerlenmiştir. Bu durumda (H, M) çiftinin transversal olması için gerek ve yeter koşul her $g \in G$ için $|M \cap Hg| \leq 1$ olmasıdır.

Sağ ve sol bölüm kümeleri sırasıyla $H \setminus G = \{Hx|x \in G\}$ ve $G \setminus H = \{xH|x \in G\}$ ile verilir. H, G nin altgrubu olmak üzere $H \setminus G$ ve G/H , G nin bir ayırımını verir.

[1] de ultra grubun tanımı aşağıda verilen bir dizi tanım ile birlikte şu şekilde verilmiştir:

Tanım 1.1 Bir ayırımın bir transversali ayırımın her bir elemanından sadece bir elemanı içeren bir kümedir. $H \leq G$ olmak üzere $H \setminus G$ ($G \setminus H$) için bir transversal H nin G deki bir sağ (sol) transversali olarak adlandırılır.

H , G nin altgrubu ve M , G nin boştan farklı altkümeleri olsun. Her $g \in G$ için $|M \cap Hg| = 1$ ise o zaman $G = HM$ sağlanır. Bu eşitliğin sağlandığını göstermek için $G \subseteq HM$ olduğunu göstermek

yeterlidir. Kabul edelim ki $g \in G, g \notin H, g \notin M$ olsun. $m \in M \cap Hg$ ise o zaman $g = h^{-1}m$ olup $g \in HM$ sağlanır. G grup olduğundan $MH = G = HM$. Böylece her $mh \in MH$ için $mh = h'm'$ olacak şekilde $h' \in H$ ve $m' \in M$ vardır.

Tanım 1.2 H, G nin altgrubu ve M, G nin boştan farklı altkümesi ve $e \in M$ olsun. Eğer herhangi $h \in H$ ve her $m \in M$ için $mh = h'm'$ olacak şekilde tek türlü $h' \in H$ ve $m' \in M$ varsa M ye G nin H altgrubuna göre bir *tamlayan* kümesi denir. Burada $h' := {}^mh$ ve $m' = m^h$ ile gösterilecektir.

Benzer şekilde herhangi $m_1, m_2 \in M$ için $m_1m_2 = (m_1, m_2)[m_1, m_2]$ tek türlü $(m_1, m_2) \in H$ ve $[m_1, m_2] \in M$ vardır. G grup olduğundan $a \in M$ için $a^{-1} = a^{(-1)}a^{[-1]}$ olacak şekilde tek türlü $a^{(-1)} \in H$ ve $a^{[-1]} \in M$ vardır.

Tanım 1.3 ${}_H M, G$ nin H altgrubuna göre bir tamlayan kümesi olmak üzere

$\alpha: {}_H M \times {}_H M \rightarrow {}_H M, \alpha((m_1, m_2)) = [m_1, m_2]$ ve $\beta_h: {}_H M \rightarrow {}_H M$, her $h \in H$ için $\beta_h(m) = m^h$ işlemleri ile birlikte ${}_H M$ kümesine H nin G grubu üzerinde bir *ultra – grubu* denir.

$a, b \in M$ için $[a, b] = [b, a]$ sağlanıyorsa M ultra-grubuna *abelyan* denir. Abelyan olmayan bir grubun abelyan ultra-grupları olabilir. Açık olarak her grup bir ultra-gruptur fakat tersi doğru değildir.

Bu tanımlar ve ardından verilen bilgiler ışığında aşağıdaki temel önermelere ulaşılmıştır:

Önerme 1.4 M, H nin G grubu üzerinde bir *ultra – grubu* olsun. Buna göre aşağıdakiler sağlanır:

Her $a, b, c \in M$ ve $h, h' \in H$ için;

$$a^{hh'} = (a^h)^{h'},$$

$$[a, b]^h = [a^{(b^h)}, b^h]$$

$$[[a, b], c] = [a^{(b, c)}, [b, c]]$$

$$e^h = e, a^e = a$$

$$[e, a] = a = [a, e]$$

$$[a^{-1}, a] = e = [a^{(a^{(-1)})}, a^{[-1]}]$$

Ultra-grup tanımından sonra altultra-grup tanımı da bilinen altgrup tanımına benzer şekilde verilmiştir.

Tanım 1.5 M, H nin G grubu üzerinde bir *ultra – grubu* olsun. S, M nin birimi içeren bir altkümesi olsun. Eğer S , Tanım 1.3 de tanımlanan α, β_h işlemlerine göre kapalı ise o zaman S ye H nin G grubu üzerinde bir *altultra – grubu* denir.

Yine normal altultra-grup tanımı altgrup tanımında sağ ve sol kosetlerin eşliğine benzetilerek aşağıdaki tanımda verilmiştir.

Tanım 1.6_ M, H nin G grubu üzerinde bir *ultra – grubu* ve N, M nin bir altultra-grubu olmak üzere eğer her $a, b \in M$ için $[a, [N, b]] = [N, [a, b]]$ sağlanıyorsa o zaman N ye *normal altultra – grup* denir.

Bulgular

Lemma 2.1. M, H nin G grubu üzerinde bir *ultra – grubu* ve S_1, S_2, M nin altultra-grubu olmak üzere $S_1 \cap S_2$ de M nin altultra-grubudur.

Lemma 2.2. M, H nin G grubu üzerinde bir *ultra – grubu* olsun. O zaman G nin H tarafından içerilen her K altgrubu için M nin $K = HS$ koşulunu sağlayan bir S altultra grubu vardır ve S, H nin K üzerinde bir altultra grubudur.

Sonuç 2.1. M, H nin G grubu üzerinde bir *ultra – grubu* ve $S_i, i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ için M nin $S_i \subseteq S_{i+1}$ koşulunu sağlayan altultra grupları olmak üzere $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ için $K_i = HS_i$ ve $H \leq K_i \leq G$ olacak şekilde $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ için G nin $K_i \subseteq K_{i+1}$ altgrupları vardır.

Buna göre eğer H, G nin maksimal altgrubu ise o zaman aşağıdakilerden birisi sağlanır:

M nin kendisinden başka altultra grubu yoktur.

M nin bütün altultra grupları H nin G grubu üzerinde bir *ultra – grubu*dur.

S altultra-grubu H nin G deki tamlayanıdır.

Tanım 2.1. M, H nin G grubu üzerinde bir *ultra – grubu* olmak üzere $Z(M) = \{m \in M \mid [m, m'] = [m', m], \forall m' \in M\}$ kümesine M nin *merkezi* denir.

Sonuç 2.2. M, H nin G grubu üzerinde bir *ultra – grubu* olsun. O zaman $M \cap Z(G) \subseteq Z(M)$ sağlanır.

Tanım 2.2. M, H nin G grubu üzerinde bir *ultra – grubu* olsun. $e \in X \subseteq M$ ve S_i, M nin altultra grupları olmak üzere $\langle X \rangle = \bigcap_{X \subseteq S_i} S_i$ dir.

Sonuç 2.3. Yukarıda tanımlanan $\langle X \rangle, M$ nin bir altultra grubudur.

Teorem 2.1. M, H nin G grubu üzerinde bir *ultra – grubu* ve $\langle X \rangle$ Tanım 2.2 de verilen altultra grup olmak üzere $\langle X \rangle = \left\{ \left[\left[\left[x_1, x_2 \right], x_3 \right] \dots \right], x_n \right] \mid n \in \mathbb{N}, x_i \in X \right\}$.

Tanım 2.3. Tanım 2.2 de verilen altultra-gruba X tarafından üretilen altultra grup denir.

Teorem 2.2. M, H nin G grubu üzerinde bir *ultra – grubu* ve N_1, N_2, M nin normal altultra grupları olmak üzere $K = N_1 \cap N_2$ ve $\forall a, b \in M$ için $[a, [K, b]] \subseteq [K, [a, b]]$ sağlanır.

Lemma 2.3. M, H nin G grubu üzerinde bir *ultra – grubu* ve $M \subset C_G(H)$ ise o zaman M de sol sadeleşme özelliği sağlanır.

Teorem 2.3. M, H nin G grubu üzerinde bir *ultra – grubu* , $M \subset C_G(H)$ olsun. N_1, N_2, M nin normal altultra grupları olmak üzere $N_1 \cap N_2, M$ nin normal altultra grubudur.

Eğer Lemma 2.1 de tanımlanan θ , M nin işlemlerini koruyorsa θ bir kongrüans bağıntısı olur. M nin işlemleri aynı zamanda S altultra-grubu için de sağlanır, bu durumda S bir kongrüans olarak ele alınabilir. Özel olarak bir normal altultra-grup bir kongrüanstır.

Teorem 2.4. M bir ultra grup, S bir altultra-grup ve θ , M üzerinde bir kongrüans olsun. $S/\theta = \{[s]\theta | s \in S\}$ kümesi Tanım 2.3 de tanımlanan işlemlere göre bir ultra-gruptur. Eğer S/θ abelyan bir ultra-grup ise o zaman her $s_1, s_2 \in S$ için $[s_1, s_2]\theta [s_2, s_1]$ olur.

Sonuç 2.4. M, H nin G grubu üzerinde bir *ultra – grubu*, N, M nin bir normal altultra-grubu olsun. Eğer M/N abelyan ise o zaman her $m_1, m_2 \in M$ için $[m_1, m_2] \in [m_2, [N, m_1]]$ ve $[m_2, m_1] \in [m_1, [N, m_2]]$ olur.

Sonuç 2.5. M, H nin G grubu üzerinde bir *ultra – grubu* olsun. Eğer M nin her N normal altultra-grubu için $M/N = [e]N$ ise o zaman M is abelyan ultra-group.

IV. Sonuç ve Öneriler

Proje başlangıcından itibaren geçen 24 aylık süre boyunca kabul edilen başvurudaki iş paketine uygun bir süreç yürütülmüştür. Birinci altı aylık dönemde;

- Normal altultra-grup tanımı yardımıyla bölüm grubu tanımlanmış ve bölüm grubunun hangi koşullar altında abelyan olduğu araştırılmıştır.
- Bir küme tarafından üretilen altultra-grup tanımı oluşturulmuş ve karakterize edilmiştir.
- Maksimal altultra-grup ve bir altultra-grubun merkezi tanımlanmıştır.

Devam eden ikinci altı aylık dönemde;

- Bir ultra grubun normal altultra gruplarının belirli koşullar altında arakesitinin de normal olduğu gösterilmiştir.
- Bir ultra grubun herhangi bir altkümesi tarafından üretilen altgrup tanımlanmış ve elemanları karakterize edilmiştir.
- Bir ultra grubun merkezi tanımlanmış ve grubun merkezi ile arasındaki ilişki belirtilmiştir.

Üçüncü altı aylık dönemde ise;

- Bir ultra grubun bölüm ultra grubunun abelyanlığı ile ilgili bulgular eklenmiştir.

- Çalışmalar yayınlanması için Korean Journal of Mathematics dergisine gönderilmiştir. Sonuç raporunun hazırlandığı dönemde yukarıda bahsi geçen dergide yayınlanması uygun görülmemiş olup elde edilen tüm özgün bulgular farklı bir dergide yayınlanmak üzere düzenlenmektedir.

V. Geleceğe İlişkin Öngörülen Katkılar

Bu projede sunulan bazı temel grup teorik yapıların uyarlanması ardından gruplarda çözülebilirlik, nilpotentlik kavramlarının burada verilen tanıma adaptasyonu da çalışılabilir. Ayrıca maksimal altultra-grup ve bölüm ultra-grubu vasıtasıyla basit altultra-grup oluşturulabilir. Benzer şekilde temel cebirsel yapıların ultra-grup uyarlamaları çalışılabilir. Böylece proje grup teoride yeni tanıtılan ultra-grup tanımı yardımıyla bu alanda oldukça fazla çalışma alanına sahiplik edecek ve araştırmacılar bu alanlardaki çalışmalara yoğunluk göstereceklerdir. Bu kavramın temel grup teori uyarlaması olan projeden elde edilen bulgular yayınlandığında bu alanda çalışmalar yapan diğer matematikçilere öncülük edecektir.

VI. Sağlanan Altyapı Olanakları ile Varsa Gerçekleştirilen Projeler

Altyapı olanağı bulunmamaktadır.

VII. Sağlanan Altyapı Olanaklarının Varsa Bilim/Hizmet ve Eğitim Alanlarındaki Katkıları

Altyapı olanağı bulunmamaktadır.

VIII. Kaynaklar

[1] Moggadhasi G., Tolue B., Zolfaghari P. (2016). On The Structure of Ultra-Groups Over a Finite Group. U.P.B Sci. Bull.

[2] Tolue B., Moggadhasi G., Zolfaghari P. (2017). On The Category of Ultra-Groups. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics.

IX. Ekler

a. Mali Bilanço ve Açıklamaları

Desteklenen projede sunulan ve onaylanan 713,04 TL tutarındaki bütçe aşağıda verilmiştir:

5. PROJE BÜTÇESİ ve HARCAMA PLANI (TL) (Tahmini bedel KDV dâhil olarak yazılacaktır)**5.1 SARF MALZEME VE KİMYASALLAR**

Tanımı/Adı	Miktar	Ölçü Birimi	Birim Fiyat	Tutar
Roller Kalem 0.7 mm Mavi	5	Adet	3,96 TL	19,82 TL
Roller Kalem 0.7 mm Kırmızı	5	Adet	3,96 TL	19,82 TL
Siyah SCX 4200 için Muadil Toner	1	Adet	63,95 TL	63,95 TL
Hava Baloncuklu Zarf 24 cm x 32 cm 10'lu Paket	2	Paket	18,88 TL	37,76 TL
0.7 mm 2B Klasik Kalem Ucu 12'li Paket (Tombow)	1	Paket	10,92 TL	10,92 TL
Orta Boy Saklama Kutusu 30 cm x 35 cm x 41 cm (Siyah)	4	Adet	30,55 TL	122,20 TL
Rotring 300 Versatil Uçlu Kalem 0.7 mm.	1	Adet	49,10 TL	49,10 TL
Kitap , Algebra , Hungerford ,Thomas W.	1	Adet	48,95 €	500 TL
5.1.1 KDV DAHİL TOPLAM TUTAR				

Bu listede verilen ilk üç kalem üniversitenin var olan kaynaklarından elde edilmiş olup ayrıca satın alınmamıştır. Listede son satırda bulunan kitap Malzeme İstem formunda belirtilmiş fakat Kütüphane ile yapılan görüşmeler sonucunda Boğaziçi Üniversitesi Kütüphanesinden bir süreliğine temin edilmesi uygun görülmüştür. Listedeki diğer kalemler eksiksiz temin edilmiş ve tarafıma iletilmiştir. Bu harcamaya ait Malzeme İstem Formu, satın alma biriminden elde edilen fatura ve Malzeme Teslim Alma Tutanağı ekte verilmiştir. Toplamda yapılan harcama tutarı 350,46 TL dir.

b. Makine ve Teçhizatın Konumu ve İlerideki Kullanımına Dair Açıklamalar

Projede Makine ve Teçhizat satın alınmamış ve kullanılmamıştır.

c. Teknik ve Bilimsel Ayrıntılar

Teknik ve Bilimsel Ayrıntılar bulunmamaktadır.

d. Sunumlar (bildiriler ve teknik raporlar)

Projedeki çalışmalar herhangi bir bilimsel toplantıda sunulmamıştır.

e. Yayınlar (hakemli bilimsel dergiler) ve tezler

Projeden elde edilen bulgular yayın haline dönüştürülmüş olup dergilere gönderilmektedir.

NOT: Verilen sonuç raporu bir (1) nüsha olarak ciltsiz şekilde verilecek, sonuç raporu Komisyon onayından sonra ciltlenerek bir kopyasının yer aldığı CD ile birlikte sunulacaktır. Sonuç raporunda proje sonuçlarını içeren, ISI' nın SCI veya SSCI veya AHCI dizinleri kapsamında ve diğer uluslararası dizinlerce taranan hakemli dergilerde yayınlanmış makaleler, III. Materyal ve Yöntem ve IV. Analiz ve Bulgular bölümleri yerine kabul edilir.

